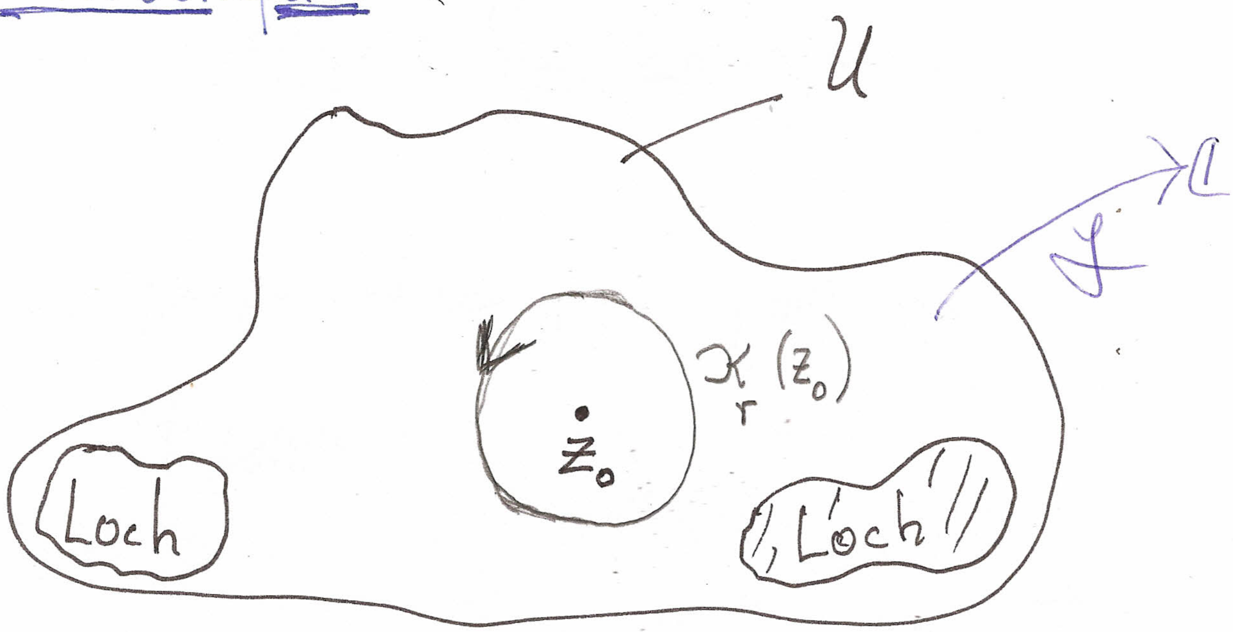
Zusammenfassung Kap. 23: „Cauchy"

Vor: $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorph,
d.h. (zunächst nicht mehr als)
$f'(z)$ existiert $\forall z \in \mathcal{U}$

„Kreisscheibenfall":



Forderung: die abgeschlossene Kreisscheibe um z_0 mit Radius r liegt in U

Cauchy's Satz:

$$\boxed{\int_{\mathcal{K}_r(z_0)} f(z)\,dz = 0}$$

$$\Downarrow$$

Cauchy's Formel:

$$\boxed{f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{K}_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-w}\,dz \quad \forall w \in B_r(z_0)}$$

Verallgemeinerung:

„ γ statt $\mathcal{K}_r(z_0)$ ",

wobei γ ein einfach geschlossener

Weg in U ist, der keine Löcher umschließt

Bei der „Formel" muss γ positiv orientiert sein, w ist aus dem Inneren von γ zu wählen.

Folgerungen aus der „Formel":

f ist auf U beliebig oft komplex diff'bar mit

$$\boxed{f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\, dz}$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}_0,\ w \in B_r(z_0)$

Mit „$n=1$ und $r \to \infty$"

folgt:

Liouville:

$$\boxed{\begin{array}{l} f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ holomorph} \\ \text{und beschränkt} \\ \Longrightarrow f \equiv \text{const} \end{array}}$$

Tatsächlich sind holomorphe Funktionen nicht nur beliebig oft komplex differenzierbar: Man kann sie lokal durch konvergente Potenzreihen darstellen.

Erinnerung (Kapitel 7.2):

gegeben sind

ein Punkt $\boxed{z_0 \in \mathbb{C} \text{ „Entwicklungsmitte"}}$

Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots \in \mathbb{C}$;

formale Potenzreihe mit diesen Daten:

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Für welche $z \in \mathbb{C}$ liegt Konvergenz vor?

Antwort: Es gibt eine eindeutige Zahl

$r \in [0, \infty]$ Konvergenzradius

wie folgt:

$r = 0$: Konvergenz nur in $z = z_0$

$r = \infty$: Konvergenz für alle $z \in \mathbb{C}$

$\boxed{0 < r < \infty}$: man hat Konvergenz

für $z \in B_r(z_0) := \{w \in \mathbb{C} : |w - z_0| < r\}$,

Divergenz für z mit $|z_0 - z| > r$;

für z mit $|z - z_0| = r$ ist keine allgemeine Aussage möglich.

Beispiel 1 :

$$\boxed{f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n}$$

(geometrische Reihe)

hier: $z_0 = 0$, $a_n = 1$

Aus der Formel

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z} \qquad \forall z \in \mathbb{C} - \{1\}$$

liest man ab : $\boxed{r=1}$

(denn: $z^{N+1} \longrightarrow 0$ für $|z|<1$; für $|z|>1$ konvergiert z^{N+1} nicht bei $N \to \infty$)

Für $|z| = 1$ existiert rechts kein Grenzwert bei $N \to \infty$, also ist die geometrische Reihe auf dem Rand des Konvergenzkreises $B_1(0)$ divergent.

Beispiel 2 : $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$

- Konvergenz für $|z| < 1$
  (da $\frac{1}{n} |z|^n \leq |z|^n$)

- Divergenz für $|z| > 1$
  (da $\frac{1}{n} z^n$ dann <u>keine</u> Nullfolge)

$\Longrightarrow$ Konvergenzradius $r = 1$

Im Randpunkt $z = 1$ liegt Divergenz
vor: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Für den Randpunkt $z = -1$ hat
man Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

Kapitel 24: Entwicklung holomorpher Funktionen

24.1 Taylor Reihen

Wir beginnen mit der einfachen Feststellung, dass komplexe Potenzreihen holomorphe Funktionen beschreiben.

Satz 24.1.1 (Differentation v. Potenzreihen)

Sei die Potenzreihe

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

konvergent auf der offenen Kreisscheibe $B_r(z_0)$ mit Radius $\boxed{r > 0}$.

Dann ist f eine holomorphe

Funktion auf $B_r(z_0)$ mit

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z-z_0)^{n-1}.$$

Die Reihe für $f'(z)$ hat denselben Konvergenzradius wie die ursprüngliche Reihe.

Beweisidee:

gliedweise Differentation +
Konvergenzdiskussion

Beispiel: $f(z) := e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$

konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$ $\Longrightarrow$

Konvergenzradius $r = \infty$

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d}{dz} z^n =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = e^z$$

Ergebnis: $f'(z) = f(z) = e^z$

Folgerung aus Satz 24.1.1:

(Konvergente!) Potenzreihen liefern einen ganzen Vorrat holomorpher Funktionen.

(„e^z, $\sin z$, $\cos z$, ...")

Viel überraschender ist die Feststellung, dass die Taylor-Reihen holomorpher f stets lokal konvergent sind und f darstellen.

Satz 24.1.2: Es sei f holomorph zumindest auf der offenen Kreisscheibe $B_r(z_0)$ um $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $r > 0$.

Man bildet die

Taylor-Reihe in z_0
$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n , \\[2ex] a_n := \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \end{array} \right.$$

Dann konvergiert diese auf $B_r(z_0)$ gegen f, d.h. :

$$\begin{cases} f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \\[2ex] z \in B_r(z_0) \end{cases}$$

Beweisidee: f holomorph auf

$U := B_r(z_0) \Longrightarrow$ die Cauchy-

Integralformel gilt für jede Kreislinie

$\mathcal{K}_\rho(z_0)$, $0 < \rho < r$;

sei jetzt $z \in U$ beliebig;

wähle $\rho \in (|z-z_0|, r) \Longrightarrow$

$$(*) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}_\rho(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

(Satz 23.2.1)